1) В действительности, однако, движение в достаточно сильной струе становится турбулентным (§ 36). Отметим, что роль числа Рейнольдса для рассмотренной струи играет безразмерный параметр (P/pv2)1/2.
2) 2) См. Румер Ю. Б. — Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, с. 255.

Затопленная ламинарная струя с отличным от нуля моментом вращения вокруг оси рассмотрена Лойцянским Л. Г. — Прикл. мат. и мех., 1953, т. 17, с. 3.

Упомянем, что гидродинамические уравнения несжимаемой вязкой жидкости для любого стационарного осесимметричного движения, в котором скорость убывает с расстоянием как 1/r, могут быть сведены к одному обык¬новенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. См. Слезкин Н. А.— Уч. зап. МГУ, 1934, вып. II; Прикл. мат. и мех., 1954, т 18, с. 764.

§ 24. Колебательное движение в вязкой жидкости

Движение, возникающее в вязкой жидкости при колебаниях погруженных в нее твердых тел, обладает рядом характерных особенностей. Для изучения этих особенностей удобно начать с рассмотрения простого типичного примера (G. G. Stokes, 1851). Пусть несжимаемая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей (в своей плоскости) простое гармоническое колебательное движение с частотой ω). Требуется определить возникающее при этом в жидкости движение.

Твердую поверхность выберем в качестве плоскости y, z; области жидкости соответствуют $x > 0$. Ось y выберем вдоль направления колебаний поверхности. Скорость u колеблющейся поверхности есть функция времени вида $A\cos(\omega t+\alpha)$. Удобно писать такую функцию в виде вещественной части от комплексного выражения: $u=\mathrm{Re}\{u_0e^{-i\omega t}\}$ (с комплексной, вообще говоря, постоянной $u_0=Ae^{-i\alpha}$; надлежащим выбором начала отсчета времени эту постоянную всегда можно сделать вещественной). До тех пор, пока при вычислениях производятся только линейные операции над скоростью u, можно опускать знак взятия вещественной части и вычислять так, как если бы u было комплексным, после чего можно взять вещественную часть от окончательного результата. Таким образом, будем писать:

$$u_y=u=u_0e^{-i\omega t}. \tag{24,1}$$

Скорость жидкости должна удовлетворять граничному условию $\mathbf{v}=\mathbf{u}$, т. е.

$$v_x=v_z=0,\ v_y=u$$

при $x=0$.

Из соображений симметрии очевидно, что все величины будут зависеть только от координаты x, (и от времени t). Из уравнения непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ имеем поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0,$$

откуда $v_x=\mathrm{const}$, причем согласно граничным условиям эта постоянная должна быть равной нулю, т. е. $v_x=0$. Поскольку все величины не зависят от координат y, z, и благодаря равенству v_x нулю имеем тождественно $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=0$. Уравнение движения (15,7) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p+\nu\Delta\mathbf{v}. \tag{24,2}$$

Это уравнение линейно. Его x-компонента дает $\partial p/\partial x=0$, т. е. $p=\mathrm{const}$.

Из симметрии очевидно также, что скорость $\mathbf{v}$ направлена везде по оси y. Для $v_y=v$ имеем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{24,3}$$

(типа одномерного уравнения теплопроводности). Будем искать периодическое по x и t решение вида

$$v=u_0e^{i(kx-\omega t)},$$

удовлетворяющее условию $v=u$ при $x=0$. Подстановка в уравнение дает[1]

$$i\omega=\nu k^2,\quad k=\frac{1+i}{\delta},\quad \delta=\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \tag{24,4}$$

так что скорость

$$v=u_0e^{-x/\delta}e^{i(x/\delta-\omega t)}, \tag{24,5}$$

(выбор знака корня $\sqrt{i}$ в (24,4) определяется требованием затухания скорости в глубь жидкости).

Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны: скорость $v_y=v$ перпендикулярна направлению распространения волны. Они, однако, быстро затухают по мере удаления от создающей их колеблющейся твердой поверхности. Затухание амплитуды происходит по экспоненциальному закону с

---

[1]Это видно из следующих соотношений:

$$-i\omega v=-\nu k^2 v;\quad \frac{(1+i)^2}{2}\omega=\nu k^2;\quad (1+i)^2\frac{\omega}{2\nu}=k^2.$$

глубиной проникновения δ[1]. Эта глубина падает с увеличением частоты волны и растет с увеличением вязкости жидкости.

Действующая на твердую поверхность сила трения направлена, очевидно, по оси y. Отнесенная к единице площади, она равна

$$\sigma_{xy} = \eta \left.\frac{\partial v_y}{\partial x}\right|_{x=0} = i\eta k u = i\rho\nu\frac{1+i}{\delta}u = \sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}}(i-1)u. \qquad (24,6)$$

Предполагая u_0 вещественным и отделив в (24,6) вещественную часть, получим:

$$\sigma_{xy} = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}}(i-1)u_0(\cos\omega t - i\sin\omega t)\right\} = -\sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}}u_0(\cos\omega t - \sin\omega t);$$

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega\eta\rho}\,u_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Скорость же колеблющейся поверхности есть $u = u_0\cos\omega t$. Таким образом, между скоростью и силой трения имеется сдвиг фаз[2].

Легко вычислить также и среднее (по времени) значение диссипации энергии при рассматриваемом движении. Это можно сделать по общей формуле (16,3); в данном случае, однако, проще вычислить искомую диссипацию непосредственно как работу сил трения. Именно, диссипация энергии в единицу времени, отнесенная к единице площади колеблющейся плоскости, равна среднему значению произведения силы σ_{xy} на скорость $u_y = u$:

$$-\overline{\sigma_{xy}u} = u_0^2\sqrt{\omega\eta\rho}\cdot\overline{\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\cos\omega t} = \frac{u_0^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}}. \qquad (24,7)$$

Она пропорциональна корню из частоты колебаний и из вязкости жидкости.

Может быть решена в замкнутом виде также и общая задача о жидкости, приводимой в движении плоской поверхностью, движущейся (в своей плоскости) по произвольному закону $u = u(t)$. Мы

---

[1] На расстоянии δ амплитуда волны убывает в e раз, а на протяжении одного пространственного периода волны — в $e^{2\pi} \approx 540$ раз.

[2] При колебаниях полуплоскости (параллельно линии своего края) возникает дополнительная сила трения, связанная с краевыми эффектами. Задача о движении вязкой жидкости при колебаниях полуплоскости (а также и более общая задача о колебаниях клина с произвольным углом раствора) может быть решена с помощью класса решений уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$, используемого в теории дифракции от клина. Мы отметим здесь лишь следующий результат: возникающее от краевого эффекта увеличение силы трения на полуплоскость может быть описано как результат увеличения площади при смещении края полуплоскости на расстояние $\delta/2$ с δ из (24,4) (*Л. Д. Ландау*, 1947).

не станем производить здесь соответствующие вычисления, так как искомое решение уравнения (24,3) формально совпадает с решением аналогичной задачи теории теплопроводности, которая будет рассмотрена в § 52 (и дается формулой (52,15)). В частности, испытываемая твердой поверхностью сила трения (отнесенная к единице площади) определяется формулой

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \tag{24,7}$$

(ср. (52,14)).

Рассмотрим теперь общий случай колеблющегося тела произвольной формы. В изученном выше случае колебаний плоской поверхности член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении движения жидкости исчезал тождественно. Для поверхности произвольной формы это, конечно, уже не имеет места. Мы будем, однако, предполагать, что этот член мал по сравнению с другими членами, так что им все же можно пренебречь. Необходимые для возможности такого пренебрежения условия будут выяснены ниже.

Таким образом, будем исходить по-прежнему из линейного уравнения (24,2). Применим к обеим сторонам этого уравнения операцию **rot**. Член $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,p$ исчезает тождественно, так что мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \nu\Delta\mathbf{rot}\,\mathbf{v}, \tag{24,9}$$

т. е. $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению типа уравнения теплопроводности.

Но мы видели выше, что такое уравнение приводит к экспоненциальному затуханию описываемой им величины. Мы можем, следовательно, утверждать, что завихренность затухает по направлению в глубь жидкости. Другими словами, вызываемое колебаниями тела движение жидкости является вихревым в некотором слое вокруг тела, а на больших расстояниях быстро переходит в потенциальное движение. Глубина проникновения вихревого движения $\sim\delta$.

В связи с этим возможны два важных предельных случая. Величина δ может быть велика или мала по сравнению с размерами колеблющегося в жидкости тела. Пусть l—порядок величины этих размеров. Рассмотрим сначала случай $\delta \gg l$; это значит, что должно выполняться условие[1] $l^2\omega \ll \nu$. Наряду с этим условием мы будем

---

[1] Т. к. $\delta^2 = \frac{2\nu}{\omega} >> l^2$.

предполагать также, что число Рейнольдса мало. Если a — амплитуда колебаний тела, то его скорость — порядка величины $a\omega$. Поэтому число Рейнольдса для рассматриваемого движения есть $\omega al/\nu$. Таким образом, предполагаем выполнение условий

$$l^2\omega \ll \nu, \quad \frac{\omega la}{\nu} \ll 1. \tag{24,10}$$

Это — случай малых частот колебаний. Но малость частоты означает, что скорость медленно меняется со временем и потому в общем уравнении движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

можно пренебречь производной $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Членом же $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь в силу малости числа Рейнольдса.

Отсутствие члена $\partial\mathbf{v}/\partial t$ в уравнении движения означает стационарность движения. Таким образом, при $\delta \gg l$ движение можно рассматривать в каждый данный момент времени как стационарное. Это значит, что движение жидкости в каждый данный момент такое же, каким оно было бы при равномерном движении тела со скоростью, которой оно в действительности обладает в данный момент. Если, например, речь идет о колебаниях погруженного в жидкость шара, с частотой, удовлетворяющей неравенствам (24,10) (где l есть теперь радиус шара), то можно поэтому утверждать, что испытываемая шаром сила сопротивления будет определяться формулой Стокса (20,14), полученной для равномерного движения шара при малых числах Рейнольдса.

Перейдем теперь к изучению противоположного случая, когда $l \gg \delta$. Для того чтобы можно было опять пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, необходимо в этом случае одновременное выполнение условия малости амплитуды колебаний тела по сравнению с его размерами

$$l^2\omega \gg \nu, \quad a \ll l \tag{24,11}$$

(заметим, что число Рейнольдса при этом отнюдь не должно быть малым). Действительно, оценим член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Оператор $(\mathbf{v}\nabla)$ означает дифференцирование вдоль направления скорости. Но вблизи поверхности тела скорость направлена в основном по касательной. В этом направлении скорость заметно меняется лишь на протяжении размеров тела. Поэтому $|(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| \approx v^2/l \approx a^2\omega^2/l$ (сама скорость $v \approx a\omega$). Производная же $|\partial\mathbf{v}/\partial t| \approx v\omega \approx a\omega^2$. Сравнив оба выражения, видим, что при $a \ll l$ действительно $|(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| \ll |\partial\mathbf{v}/\partial t|$. Члены же $\partial\mathbf{v}/\partial t$ и

$\nu\Delta\mathbf{v}$[1] имеют теперь, как легко убедиться, одинаковый порядок величины.

Рассмотрим теперь характер движения жидкости вокруг колеблющегося тела в случае выполнения условий (24,11). В тонком слое вблизи поверхности тела движение является вихревым. В основной же массе жидкости движение потенциально[2]. Поэтому везде, кроме пристеночного слоя, движение жидкости описывается уравнениями

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v}=0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}=0. \tag{24,12}$$

Отсюда следует, что и $\Delta\mathbf{v}=0$, а потому уравнение Навье — Стокса переходит в уравнение Эйлера. Таким образом, везде, кроме пристеночного слоя, жидкость движется как идеальная.

Поскольку пристеночный слой тонкий, то при решении уравнений (24,12) с целью определения движения в основной массе жидкости следовало бы взять в качестве граничных условий те условия, которые должны выполняться на поверхности тела, т. е. равенство скорости жидкости скорости тела. Однако решения уравнений движения идеальной жидкости не могут удовлетворить этим условиям. Можно потребовать лишь выполнения этого условия для нормальной к поверхности компоненты скорости жидкости.

Хотя уравнения (24,12) и неприменимы в пристеночном слое жидкости, но поскольку получающееся в результате их решения распределение скоростей уже удовлетворяет необходимым граничным условиям для нормальной компоненты скорости, то истинный ход этой компоненты вблизи поверхности не обнаружит каких-либо существенных особенностей. Что же касается касательной компоненты, то, решая уравнения (24,12), мы получили бы для нее некоторое значение, отличное от соответствующей компоненты скорости тела, между тем как эти скорости тоже должны быть равными. Поэтому в тонком пристеночном слое должно происходить быстрое изменение касательной компоненты скорости.

Легко определить ход этого изменения. Рассмотрим какой-нибудь участок поверхности тела, размеры которого велики по сравнению с δ, но малы по сравнению с размерами тела. Такой участок

---

[1] $\nu\Delta\mathbf{v}\approx\nu a\omega/\delta^2=\nu a\omega^2/(2\nu)=a\omega^2/2$.

[2] При колебаниях плоской поверхности на расстоянии δ затухает не только $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$, но и сама скорость $\mathbf{v}$. Это связано с тем, что плоскость при своих колебаниях не вытесняет жидкости и потому жидкость вдали от нее остается вообще неподвижной. При колебаниях же тел другой формы происходит вытеснение жидкости, в результате чего она приходит в движение, скорость которого заметно затухает лишь на расстояниях порядка размеров тела.

можно рассматривать приближенно как плоский и потому можно воспользоваться для него полученными выше для плоской поверхности результатами. Пусть ось x направлена по направлению нормали к рассматриваемому участку поверхности, а ось y — по касательной к нему, совпадающей с направлением тангенциальной составляющей скорости элемента поверхности. Обозначим посредством v_y касательную компоненту скорости движения жидкости относительно тела; на самой поверхности v_y должно обратиться в нуль. Пусть, наконец, $v_0 e^{-i\omega t}$ есть значение v_y, получающееся в результате решения уравнений (24,12). На основании полученных в начале этого параграфа результатов мы можем утверждать, что в пристеночном слое величина v_y будет падать по направлению к поверхности по закону[1)]

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t}\left[1 - e^{-(1-i)x\sqrt{\omega/2\nu}}\right]. \tag{24,13}$$

Наконец, полная диссипируемая в единицу времени энергия будет равна интегралу

$$\dot{\bar{E}}_{\text{кин}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}}\oint\!\!\oint |v_0|^2\, df, \tag{24,14}$$

взятому по всей поверхности колеблющегося тела.

В задачах к этому параграфу вычислены силы сопротивления, действующие на различные тела, совершающие колебательное движение в вязкой жидкости. Сделаем здесь следующее общее замечание по поводу этих сил. Написав скорость движения тела в комплексном виде $u = u_0 e^{-i\omega t}$, мы получаем в результате силу сопротивления F, пропорциональную скорости u, тоже в комплексном виде $F = \beta u$, где $\beta = \beta_1 + i\beta_2$— комплексная постоянная; это выражение можно написать как сумму двух членов:

$$F = (\beta_1 + i\beta_2)u = \beta_1 u - \frac{\beta_2}{\omega}\dot{u}, \tag{24,15}$$

пропорциональных соответственно скорости u ускорению $\dot{u}$ с вещественными коэффициентами.

Средняя (по времени) диссипация энергии определяется средним значением произведения силы сопротивления и скорости; при этом, разумеется, следует предварительно взять вещественные части написанных выше выражений, т. е. написать:

---

[1] Распределение скоростей (24,13) написано в системе отсчета, в которой твердое тело покоится ($v_y = 0$ при $x = 0$) Поэтому в качестве v_0 надо брать решение задачи о потенциальном обтекании жидкостью неподвижного тела.

$$u = \frac{1}{2}\left(u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t}\right),$$

$$F = \frac{1}{2}\left(u_0 \beta e^{-i\omega t} + u_0^* \beta^* e^{i\omega t}\right).$$

Замечая, что средние значения от $e^{\pm 2i\omega t}$ равны нулю, получим:

$$\overline{\dot{E}}_{\text{кин}} = \overline{Fu} = \frac{1}{4}\overline{\left(u_0 \beta e^{-i\omega t} + u_0^* \beta^* e^{i\omega t}\right)\left(u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}|u_0|^2 \overline{\left(\beta e^{-2i\omega t} + \beta^* + \beta + \beta^* e^{2i\omega t}\right)} = \frac{1}{4}|u_0|^2\left(\beta^* + \beta\right) = \frac{1}{2}\beta_1 |u_0|^2;$$

$$\overline{\dot{E}}_{\text{кин}} = \frac{\beta_1}{2}|u_0|^2. \qquad (24,16)$$

Таким образом, мы видим, что диссипация энергии связана только с вещественной частью величины β; соответствующую (пропорциональную скорости) часть силы сопротивления (24,15) можно назвать диссипативной. Вторую же часть этой силы, пропорциональную ускорению (определяющуюся мнимой частью β) и и не связанную с диссипацией энергии, можно назвать инерционной.

Аналогичные соображения относятся к моменту сил, действующих на тело, совершающее вращательные колебания в вязкой жидкости.

Задачи

1. Определить силу трения, действующую на каждую из двух параллельных твердых плоскостей, между которыми находится слой вязкой жидкости, причем одна из плоскостей совершает колебательное движение в своей плоскости.

Решение. Ищем решение уравнения (24,3) в виде1)

v = (A sin kx + B cos kx) e~i(sA

и определяем A и B из условий v =»«= и0e~fo* при x = O и v = 0 при x = h (h — расстояние между плоскостями). В результате получаем:

sin k (h — x)

v — u гЦп:——•

sm kh

Сила трения (на единицу поверхности) на движущейся плоскости равна

P =п — 1у ^ дх

и на неподвижной

r\ku

x=h~ sinkh