Звуковые волны

Звуковые волны

28.01.02

1. Волновое уравнение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости называют звуковыми волнами. В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

Предполагаем выбранную локальную систему отсчета связанной с основным движением жидкости, так что скорость жидкости, входящая в уравнения непрерывности и движения, есть скорость чисто колебательного движения: в звуковой волне частицы жидкости совершают колебания с мгновенной скоростью $\mathbf{v}$. Амплитуда этих колебаний мала. Считаем также малым градиент давления в основном течении и практически не меняющейся со временем его плотность.

Давление и плотность в звуковой волне представим в виде

$$p_0+\delta p,\quad \rho_0+\delta\rho, \tag{1}$$

где p_0 и ρ_0 – постоянные равновесные (или квазиравновесные) давление и плотность жидкости, а δp и $\delta\rho$ – отклонения давления и плотности от равновесных значений, обусловленные прохождением звуковой волны. Малость амплитуды колебаний подразумевает $\delta\rho/\rho_0 \ll 1$ и $\delta p/p_0 \ll 1$. Малость амплитуд колебаний в звуковой волне позволяет линеаризовать уравнения непрерывности и Эйлера

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}=0; \tag{2}$$

$$\frac{\mathbf{dv}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\mathbf{g}. \tag{3}$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_0^2}\delta\rho+\frac{1}{\rho_0^3}(\delta\rho)^2+\ldots \tag{4}$$

и подставляя соотношения (1) и (4) в уравнение (3), получаем

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p+\nabla\delta p}{\rho_0}+\frac{\nabla p+\nabla\delta p}{\rho_0^2}\delta\rho-\frac{\nabla p+\nabla\delta p}{\rho_0^3}(\delta\rho)^2+\ldots$$

Пренебрегая малыми величинами порядка выше первого, получаем

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\nabla\delta p}{\rho_0}=0. \tag{5}$$

Уравнение непрерывности преобразуется аналогично:

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_0+\delta\rho)\mathbf{v}=0;\quad \frac{\partial\rho_0}{\partial t}\approx 0;$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho_0\operatorname{div}\mathbf{v}=0; \tag{6}$$

Представим давление как функцию термодинамических параметров ρ и s: $p=(\rho,s)$; тогда

$$dp(\rho, s) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds. \tag{7}$$

Звуковую волну в первом приближении рассматриваем как адиабатический процесс: ввиду малости амплитуды колебаний и значительной частоты диссипация энергии теплопроводностью малы. Поэтому, полагая $ds = 0$, получаем

$$dp(\rho, s) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho;$$

считаем, что адиабатическая производная давления по плотности – величина, практически не зависящая от координат и времени:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s \frac{dV}{d\rho} = -\frac{V}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = \frac{1}{\rho\chi},$$

где

$$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$$

–адиабатическая сжимаемость вещества, V – удельный объем, и учтено, что

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} = -V^2 = -\frac{V}{\rho}.$$

для малых колебаний давления тогда можно написать

$$\delta p(\rho, s) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \delta\rho. \tag{8}$$

Посредством этого соотношения можно исключить давление из уравнений движения.

В звуковой волне движение жидкости является безвихревым, т.е. можно положить

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\varphi.$$

Подставляем выражение скорости через потенциал φ в уравнение Эйлера и уравнение непрерывности (5) и (6):

$$\nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta p}{\rho_0}\right) = 0. \tag{9}$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{grad}\varphi = \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla^2 \varphi = 0. \tag{10}$$

Из уравнения (9) следует, что выражение в квадратных скобках не зависит от координат, поэтому может быть только функцией времени:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta p}{\rho_0} = f(t). \tag{11}$$

Поскольку потенциал скорости определен с точностью до произвольной функции времени, можно перейти к новому потенциалу по формуле

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-f(t),$$

и уравнение (11) примет вид

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t}+\frac{\delta p}{\rho_0}=0. \qquad (12)$$

Исключим давление из уравнений движения, используя соотношение (8), и опустим штрих у потенциала. В итоге система уравнений (10,11) примет вид

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho_0\nabla^2\varphi=0; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t}+\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\frac{\delta\rho}{\rho_0}=0. \qquad (14)$$

Стандартным способом из этой системы исключаем одну из неизвестных функций, в данном случае плотность ρ, одновременно повышая порядок получившегося уравнения. Для этого дифференцируем уравнение (14) по времени и подставляем в него производную плотности из уравнения (13):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\frac{1}{\rho_0}\rho_0\nabla^2\varphi'=0;$$

в результате получили волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\nabla^2\varphi'=0,$$

или

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0, \qquad (15)$$

где

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s} \qquad (16)$$

есть скорость распространения звуковой волны, или просто скорость звука.

Из соотношения (8) сразу можно выразить связь между давлением и плотностью в звуковой волне в виде

$$\delta p=c^2\delta\rho. \qquad (17)$$

Чтобы установить связь между температурой и давлением в звуковой волне, представим температуру как функцию давления и удельной энтропии p и s: $T=(p,s)$; тогда

$$dT(p,s)=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s dp+\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_\rho ds,$$

и в звуковой волне, которую рассматриваем как адиабатический термодинамический процесс, имеем

$$\delta T(p,s)=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\delta p. \qquad (18)$$

Согласно тем соотношениям Максвелла,

$$T=\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_p;\ \ \frac{1}{\rho}\equiv V=\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s;$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w(s,p)}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial w(s,p)}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial w(s,p)}{\partial p};$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s=\left(\frac{\partial}{\partial s}V\right)_p,$$

которые вытекают из первого начала термодинамики в форме

$$dw(s,p)=Tds+Vdp=\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_p ds+\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s dp,$$

получаем

$$\delta T(p,s)=\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\delta p. \tag{19}$$

Изобарную производную удельного объема по энтропии можно выразить через температурный коэффициент расширения жидкости, изобарную теплоемкость, плотность и температуру. Для этого рассмотрим соотношение

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p=\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p=V\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p^{-1}.$$

Изобарная теплоемкость может быть определена соотношением

$$c_p=T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p; \tag{20}$$

выражаем с помощью него изобарную производную энтропии по температуре и используем определение температурного коэффициента расширения

$$\beta=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{21}$$

Подстановка двух последних соотношений в формулу для производной удельного объема по энтропии дает

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p=\frac{\beta VT}{c_p}. \tag{22}$$

Таким образом,

$$\delta T(p,s)=\frac{\beta VT}{c_p}\delta p. \tag{23}$$

Соотношение

$$\gamma=\frac{c_p}{c_V}=T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\cdot\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V\right]^{-1}=\frac{-\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s}{-\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_s}=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}, \tag{24}$$

где использованы соотношения

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s; \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_s, \tag{25}$$

устанавливает связь

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T, \tag{26}$$

т. е. скорость звука может быть выражена через адиабатическую или изотермическую сжимаемость χ:

$$\rho\chi_s = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s; \quad \rho\chi_T = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T. \tag{27}$$

В случае политропного газа, удовлетворяющего уравнению Клапейрона–Менделеева $pV = RT/\mu$, (здесь, как и выше, V – удельный объем), скорость звука равна

$$c^2 = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \gamma \left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{RT}{\mu}\right)\right]_T = \gamma \frac{RT}{\mu} = \gamma \frac{p}{\rho}. \tag{28}$$

При заданной температуре скорость звука в политропном газе не зависит от давления; показатель адиабаты γ очень слабо зависит от температуры, поэтому

$$c \sim \sqrt{T}. \tag{29}$$

2. Плоская волна

Чтобы убедиться в том, что c – скорость распространения звуковой волны, а также получить некоторые соотношения для плоской звуковой волны, рассмотрим такую волну, в которой все величины зависят только от одной координаты x и времени t. Волновое уравнение (15) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = 0.$$

Введем новые переменные

$$\xi = x - ct \quad \text{и} \quad \eta = x + ct, \tag{1}$$

производные по x и t заменятся посредством следующих соотношений:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = -c\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right);$$

после их подстановки в волновое уравнение получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \tag{2}$$

Это уравнение легко интегрируется. Очевидно, производная $\partial\varphi/\partial\xi$ не может зависеть от η, так что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = f_1'(\xi),$$

где $f'_1(\xi)$ – производная произвольной функции переменной ξ. Из последнего уравнения видно, потенциал скорости может отличаться от $f_1(\xi)$ только на произвольную функцию $f_2(\eta)$ переменной η:

$$\varphi(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \tag{3}$$

Заменяя переменные ξ и η на прежние по соотношения (1), получим

$$\varphi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct). \tag{4}$$

Первая функция описывает волну, бегущую вдоль оси X в направлении возрастания x со скоростью c. Действительно, ее неизменное значение $f_1(\xi_0)$, где

$$\xi_0 = x - ct = const \tag{5}$$

–произвольная величина с размерностью длины, перемещается вдоль оси X со скоростью, которая получается из (5):

$$d\xi_0 = dx - cdt = 0;$$

$$dx/dt = c.$$

Вторая функция описывает волну, бегущую во встречном направлении. Конкретный вид этих функций определяется начальными и граничными условиями.

Из трех компонент скорости $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\varphi(x,t)$ в плоской волне отлична от нуля только одна компонента $v_x = \partial\varphi/\partial x$. Таким образом, скорость жидкости в звуковой волне направлена вдоль распространения волны. В связи с этим говорят, что звуковые волны в жидкости являются продольными.

В бегущей волне скорость $v_x = v$ связана с колебаниями давления и плотности простыми соотношениями. Пусть $f_2(x+ct) \equiv 0$. Подставляя найденное решение $\varphi(x,t) = f_1(x-ct)$ в соотношение $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\varphi$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_x v = \mathbf{grad}\varphi(x,t) = \mathbf{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mathbf{e}_x \frac{\partial f_1(x-ct)}{\partial x} = \mathbf{e}_x f_1'(x-ct) \tag{6}$$

находим скорость жидкости в звуковой волне; из соотношения (12) находим давление:

$$\delta p = -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial f_1(x-ct)}{\partial t} = \rho_0 c f_1'(x-ct); \tag{7}$$

из двух последних выражений находим связь между давлением и скоростью жидкости:

$$\delta p = \rho_0 c v, \quad v = \frac{\delta p}{\rho_0 c}. \tag{8}$$

Наконец, из соотношений (17,25) устанавливается связь между скоростью и плотностью жидкости: $\delta p = c^2 \delta\rho$,

$$v = c\frac{\delta\rho}{\rho_0}. \tag{9}$$

Установим также связь между скоростью и колебаниями температуры в звуковой волне. Имеем

$$dT(P,s)=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s dp+\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_P ds,$$

и для адиабатического процесса можем написать

$$\delta T=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \delta p.$$

Используя известное термодинамическое соотношение (см. формулу (3.6.3) в Termodynamic.doc) и формулу $\delta p=\frac{cv}{V_0}$ (8), находим

$$\delta T=\frac{T}{c_p}\frac{cv}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{c\beta T}{c_p}v,$$

где $\beta=\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ –температурный коэффициент расширения (см. (1.21)).

3. Монохроматическая волна

Для монохроматической волны, в которой все величины – гармонические функции времени,

$$\varphi=\mathrm{Re}\left\{\varphi_0(x,y,z)e^{-i\omega t}\right\}, \tag{1}$$

и волновое уравнение принимает вид

$$\nabla^2\varphi_0(x,y,z)+\frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0(x,y,z)=0. \tag{2}$$

Для бегущей в направлении оси *плоской* монохроматической волны решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_0(x,y,z)=Ae^{i\frac{\omega}{c}x},\quad \varphi=\mathrm{Re}\left\{Ae^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\}; \tag{3}$$

здесь A – комплексная амплитуда, она может быть представлена в виде

$$A=ae^{i\alpha} \tag{4}$$

с вещественными a и α. Обозначим посредством $\mathbf{n}$ единичный вектор в направлении распространения волны. Вектор $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}=\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{5}$$

называют волновым, его модуль $k=\omega/c=2\pi/\lambda$ – волновым числом, λ – длиной волны[1]. В этих обозначениях

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\left\{Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}. \tag{6}$$

Анализ распространения монохроматических звуковых волн имеет то практическое значение, что любая реальная волна может быть представлена суперпозицией бесчисленного множества монохроматических волн, различающих-

[1] Для звуковой волны с частотой 1 кГц, распространяющейся в воздухе со скоростью 330 м/с, длина волны составляет 0.33 м.

ся амплитудами, частотами и начальными фазами (математически это делается разложением в интеграл Фурье).

Задача

Определить скорость звука в мелкодисперсной двухфазной системе: пар с взвешенными в нем мелкими капельками жидкости («влажный пар») или жидкость с распределенными в ней мелкими пузырьками пара. Длина волны звука предполагается большой по сравнению с размерами неоднородностей системы.

Решение

В двухфазной системе давление p и температура T не являются независимыми переменными, а связаны друг с другом уравнением равновесия фаз (уравнением Клапейрона – Клаузиуса)

$$\frac{dp}{dT}=\frac{q}{T\left(V_2-V_1\right)}, \tag{1}$$

где $q=T(s_1-s_2)$ – удельная скрытая теплота перехода из одной фазы в другую. Смысл этого уравнения заключается в том, что приращению давления отвечает приращение температуры, при которой устанавливается равновесие фаз. Сжатие или разрежение системы сопровождается переходом вещества из одной фазы в другую.

Пусть x – массовая доля фазы 2 в рассматриваемой системе. Тогда

$$s=(1-x)s_1+xs_2; \tag{2}$$

$$V=(1-x)V_1+xV_2, \tag{3}$$

где s_1, s_2, V_1, V_2 – функции p и $T(p)$; производная любой из них по давлению выражается следующим образом:

$$\frac{df(p,T)}{dp}=\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_p\frac{dT(p)}{dp}=\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_p\frac{T\left(V_2-V_1\right)}{q}. \tag{4}$$

представим скорость звука в следующем виде:

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s^{-1}=-\left[\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right]^{-1};\quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=-\frac{V^2}{c^2}. \tag{5}$$

Преобразуем производную к новым независимым переменным p и x:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s & \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s & \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\\ \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_s & \left(\frac{\partial s}{\partial s}\right)_p\end{vmatrix}\equiv\frac{\partial(V,s)}{\partial(p,s)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\partial(V,s)}{\partial(p,x)}}{\dfrac{\partial(p,s)}{\partial(p,x)}}=\frac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_x\left(\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)_p-\left(\dfrac{\partial s}{\partial p}\right)_x\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)_p}{\left(\dfrac{\partial p}{\partial p}\right)_x\left(\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)_p-\left(\dfrac{\partial s}{\partial p}\right)_x\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)_p}=\frac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_x\left(\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)_p-\left(\dfrac{\partial s}{\partial p}\right)_x\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)_p}{\left(\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)_p}=$$

$$=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x-\frac{\left(\dfrac{\partial s}{\partial p}\right)_x\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)_p}{\left(\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)_p}; \qquad (6)$$

при этих преобразованиях учтено, что исходные переменные s и p независимы, $(\partial s/\partial p)_S=0$, тогда как $(\partial s/\partial p)_x\neq 0$. Первое слагаемое преобразуется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x=\left\{\frac{\partial}{\partial p}[(1-x)V_1+xV_2]\right\}_x=(1-x)\frac{dV_1(p,T)}{dp}+x\frac{dV_2(p,T)}{dp}=$$

$$=(1-x)\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dp}\right]+x\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dp}\right]=$$

$$=(1-x)\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}\right]+x\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}\right]; \qquad (7)$$

аналогично вычисляется производная энтропии:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x=(1-x)\left[\left(\frac{\partial s_1}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial s_1}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}\right]+x\left[\left(\frac{\partial s_2}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial s_2}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}\right];$$

изобарические производные энтропии по температуре здесь заменяются по соотношениям

$$c_{p1}=T\left(\frac{\partial s_1}{\partial T}\right)_p; \quad c_{p2}=T\left(\frac{\partial s_2}{\partial T}\right)_p,$$

а изотермические производные энтропии заменяются с помощью соотношений Максвелла[2]

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T\right]_p=\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p\right]_T=\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{\rho}\right)_p=-\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T.$$

В результате таких замен получаем

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x=(1-x)\left[-\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p+c_{p1}\frac{(V_2-V_1)}{q}\right]+x\left[-\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p+c_{p2}\frac{(V_2-V_1)}{q}\right]. \qquad (8)$$

Производные по x вычисляются проще:

[2] Termodynamic.doc, формула (17) п. 3.5

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x)V_1+xV_2\right]\right\}_p=-V_1+V_2=V_2-V_1;$$
$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x)s_1+xs_2\right]\right\}_p=-s_1+s_2=s_2-s_1. \tag{9}$$

Их отношение

$$\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p}=\frac{V_2-V}{s_2-s_1}=\frac{T(V_2-V_1)}{q};$$

Подстановка соотношений (7 – 9) в формулу (6) дает:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=(1-x)\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}\right]+x\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}\right]-$$
$$-\frac{T(V_2-V_1)}{q}\left\{(1-x)\left[-\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p+c_{p1}\frac{(V_2-V_1)}{q}\right]+x\left[-\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p+c_{p2}\frac{(V_2-V_1)}{q}\right]\right\},$$

или

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=(1-x)\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}\right]+x\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}\right]-$$
$$+(1-x)\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}-c_{p1}T\left(\frac{V_2-V_1}{q}\right)^2\right]+x\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p\frac{T(V_2-V_1)}{q}-c_{p2}T\left(\frac{V_2-V_1}{q}\right)^2\right];$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=-\frac{V^2}{c^2}=(1-x)\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p(V_2-V_1)-c_{p1}T\left(\frac{V_2-V_1}{q}\right)^2\right]+$$
$$+x\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p(V_2-V_1)-c_{p2}T\left(\frac{V_2-V_1}{q}\right)^2\right]. \tag{10}$$

Пусть фаза 1 – жидкость, фаза 2 – газ. При обычных давлениях $V_2 \gg V_1$, и газ можно рассматривать как политропный: $pV_2=RT/\mu$; рассмотрим два крайних случая: в жидкости присутствуют пузырьки пара, $x \ll 1$ (даже если их объемы равны). Тогда $V=(1-x)V_1+xV_2 \approx V_1+xV_2$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\approx-\frac{(V_1+xV_2)^2}{c^2}\approx\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p(V_2-V_1)-c_{p1}T\left(\frac{V_2-V_1}{q}\right)^2\right]+$$
$$+x\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+(c_{p1}-c_{p2})T\left(\frac{V_2-V_1}{q}\right)^2\right]\approx$$

$$\approx \left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T + \frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p V_2 - c_{p1}T\left(\frac{V_2}{q}\right)^2 \approx -c_{p1}T\left(\frac{V_2}{q}\right)^2. \tag{11}$$

Здесь учтено также, что сжимаемость жидкости и температурный коэффициент расширения малы. Из последней формулы тогда получаем

$$\frac{(V_1 + xV_2)^2}{c^2} \approx c_{p1}T\left(\frac{V_2}{q}\right)^2; \quad \frac{(V_1 + xV_2)^2}{c_{p1}T}\left(\frac{q}{V_2}\right)^2 \approx c^2;$$

и, используя уравнение Клапейрона–Менделеева $\frac{p\mu}{RT} = \frac{1}{V_2}$, окончательно

$$c = \frac{qp\mu(V_1 + xV_2)}{RT\sqrt{c_{p1}T}}. \tag{12}$$

Эта скорость весьма мала; таким образом, при образовании в жидкости пузырьков пара (кавитации) скорость звука в ней скачкообразно резко падает.

Если же $1 - x \ll 1$, т. е. Имеется пар с незначительным по массе количеством жидкости в виде капелек, $V = (1-x)V_1 + xV_2 \approx V_2$. Пренебрегая в формуле (10) первым слагаемым и V_1 по сравнению с V_2, получаем

$$-\frac{V^2}{c^2} \approx \left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T + \frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p V_2 - c_{p2}T\left(\frac{V_2}{q}\right)^2. \tag{13}$$

Вычислим входящие в это выражение производные:

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{RT}{p\mu}\right)_T = -\frac{RT}{p^2\mu} = -\frac{V_2}{p}; \quad \left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{RT}{p\mu}\right)_p = \frac{R}{p\mu}$$

$$-\frac{V^2}{c^2} \approx -\frac{V_2}{p} + \frac{2T}{q}\frac{R}{p\mu}V_2 - c_{p2}T\left(\frac{V_2}{q}\right)^2; \quad .\frac{1}{c^2} = \frac{1}{pV_2} - \frac{2T}{qV_2}\frac{R}{p\mu} + \frac{c_{p2}T}{q^2}$$

или, еще раз использовав уравнение Клапейрона – Менделеева окончательно получим

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{RT} - \frac{2}{q} + \frac{c_{p2}T}{q^2}. \tag{14}$$

И здесь добавление второй фазы уменьшает скорость звука по сравнению со скоростью звука в чистом газе $c = \sqrt{\gamma\frac{Rt}{\mu}}$, хотя и не в столь сильной степени, как в предыдущем случае.

В промежутке при возрастании x от 0 до 1 скорость звука монотонно возрастает от значения, определяемого первой из полученных предельных формул, до значения, определяемого второй из формул.

Скорость звука в двухфазной двухкомпонентной среде

Рассматриваем двухфазную двухкомпонентную среду без учета возможных фазовых превращений. Масса среды складывается из масс жидкой и газообразной фаз:

$$m = m_g + m_l = \rho_g V_g + \rho_l V_l = \left[\rho_g \alpha + \rho_l (1-\alpha)\right] V = \rho V,$$

где ρ – плотность двухфазной системы, V – ее объем, $\alpha = V_g/V$. Отсюда

$$\rho = \rho_g \alpha + \rho_l (1-\alpha). \tag{1}$$

Используем выражения для скорости звука

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T; \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c^2}; \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{\gamma}{c^2}. \tag{2}$$

Жидкость с пузырьками газа. Если двухфазная система представляет собой жидкость с маленькими пузырьками газа, можно считать, что газ эффективно обменивается теплом с жидкостью, и процесс его сжатия является изотермическим:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \left\{\frac{\partial}{\partial p}\left[\rho_g \alpha + \rho_l (1-\alpha)\right]\right\}_T = \alpha \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial p}\right)_T + (1-\alpha)\left(\frac{\partial \rho_l}{\partial p}\right)_T - \left(\rho_l - \rho_g\right)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T,$$

или, с учетом (2),

$$\frac{\gamma}{c^2} = \frac{\alpha}{c_g^2}\gamma_g + \frac{1-\alpha}{c_l^2}\gamma_l - \left(\rho_l - \rho_g\right)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T. \tag{3}$$

Из уравнения изотермы

$$p = k_1 \rho_g, \quad \text{где} \quad k_1 = const, \tag{4}$$

и допущения об отсутствии фазовых превращений

$$\frac{m_g}{m_l} = \frac{\alpha \rho_g}{(1-\alpha)\rho_l} = k_2 = const \tag{5}$$

с учетом соотношений (4,5) имеем

$$k_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\rho_g}{\rho_l} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{p}{k_1 \rho_l}; \tag{6}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{p}{\rho_l} = k_1 k_2 \equiv k; \tag{7}$$

$$\frac{p}{\rho_l} = \frac{1-\alpha}{\alpha}k = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)k;$$

отсюда получаем соотношения

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{p}{k\rho_l} = \frac{k\rho_l + p}{k\rho_l}; \quad k\rho_l = \frac{\alpha}{1-\alpha}p; \quad \frac{1}{k\rho_l} = \frac{1-\alpha}{\alpha p}; \tag{8}$$

вычисляем производную

$$\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\alpha}\right)_T = -\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{k\rho_l}\left[1 - \frac{p}{\rho_l}\left(\frac{\partial \rho_l}{\partial p}\right)_T\right] = \frac{1-\alpha}{\alpha p}\left(1 - \frac{p}{\rho_l}\cdot\frac{\gamma_l}{c_l^2}\right),$$

или

$$-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T = \alpha(1-\alpha)\left(\frac{1}{p} - \frac{\gamma_l}{\rho_l c_l^2}\right). \tag{9}$$

Подставляем в выражение (3) для скорости звука в жидкости с пузырьками:

$$\frac{\gamma}{c^2}=\frac{\alpha}{c_g^2}\gamma_g+\frac{1-\alpha}{c_l^2}\gamma_l+(\rho_l-\rho_g)\alpha(1-\alpha)\frac{1}{p}-(\rho_l-\rho_g)\alpha(1-\alpha)\frac{\gamma_l}{\rho_l c_l^2}=$$

$$=\alpha\left[\frac{\gamma_g}{c_g^2}+\frac{(\rho_l-\rho_g)(1-\alpha)}{p}\right]+(1-\alpha)\gamma_l\frac{\rho_l-\alpha(\rho_l-\rho_g)}{\rho_l c_l^2}=$$

$$=\alpha\left[\frac{\gamma_g}{c_g^2}+\frac{\alpha\rho_g+(1-\alpha)\rho_l-\rho_g}{p}\right]+(1-\alpha)\gamma_l\frac{\alpha\rho_g+(1-\alpha)\rho_l}{\rho_l c_l^2},$$

или

$$\frac{\gamma}{c^2}=\alpha\left(\frac{\gamma_g}{c_g^2}+\frac{\rho-\rho_g}{p}\right)+\gamma_l\frac{(1-\alpha)\rho}{\rho_l c_l^2}. \tag{10}$$

Считая газ политропным:

$$p=\rho_g\frac{RT}{\mu}, \tag{11}$$

для скорости звука в газе имеем

$$c_g^2=\gamma_g\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T=\gamma_g\frac{p}{\rho_g},\quad \frac{\gamma_g}{c_g^2}=\frac{\rho_g}{p}. \tag{12}$$

Для скорости звука в жидкости имеет место соотношение

$$c_l^2=\frac{E_l}{\rho_l},\quad \text{или}\quad \rho_l c_l^2=E_l; \tag{13}$$

подставляя эти соотношения в формулу (10), получаем

$$\frac{\gamma}{c^2}=\alpha\left(\frac{\rho_g}{p}+\frac{\rho-\rho_g}{p}\right)+\gamma_l\frac{(1-\alpha)\rho}{E}=\frac{\rho}{p}\left[\alpha+\gamma_l\frac{(1-\alpha)p}{E}\right],$$

или

$$c^2=\gamma\frac{p}{\rho}\cdot\frac{1}{\alpha+(1-\alpha)\gamma_l\dfrac{p}{E}}. \tag{14}$$

При обычных условиях атмосферное давление $p\sim 10^5$, для воды $E\sim 10^9$, так что в системе вода – пузырьки воздуха второе слагаемое пренебрежимо мало, если

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}>>\gamma_l\frac{p}{E}\sim 10^{-4};$$

должно также выполняться требование изотермичности сжатия пузырьков газа, так что

$$\frac{1}{2}\ge\alpha\ge 10^{-3}. \tag{15}$$

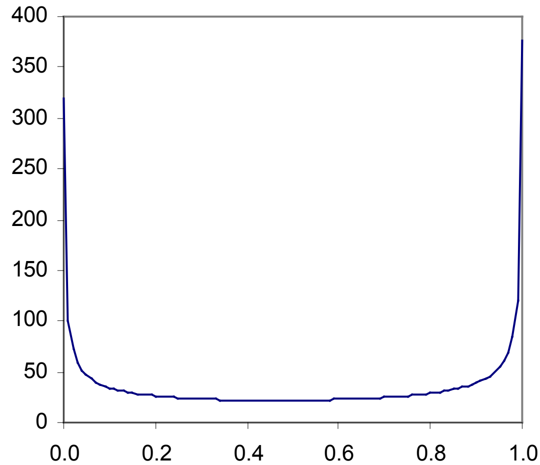
Формула (14) принимает вид

$$c^2=\gamma\frac{p}{\alpha\rho}=\gamma\frac{p}{\alpha[\alpha\rho_g+(1-\alpha)\rho_l]}. \tag{16}$$

При тех же условиях плотность воздуха мала по сравнению с плотностью воды (меньше на три порядка). При этом в формуле (16) плотностью газа можно пренебречь по сравнению с плотностью жидкости, так что формула принимает вид

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\alpha(1-\alpha)\rho_l}. \qquad (16)$$

С ростом α скорость звука в пузырьковой среде монотонно падает (см. рис.) и достигает минимума при $\alpha = 1/2$. При дальнейшем росте α сжатие газа уже не может рассматриваться как изотермический процесс.



Газ с капельками жидкости. При большом объемном содержании газа для расчета скорости звука используем формулу

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s; \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c^2}.$$

При этом процесс сжатия газа считаем адиабатическим. Вместо формулы (3) получаем

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\alpha}{c_g^2} + \frac{1-\alpha}{c_l^2} - (\rho_l - \rho_g)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_s. \qquad (18)$$

Выражаем из (6) α:

$$k_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\rho_g}{\rho_l}; \quad \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{\rho_g}{k_2 \rho_l}; \quad \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{\rho_g}{k_2 \rho_l}.$$

Дифференцируя последнее соотношение с учетом соотношений (2), получаем

$$-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_s = \frac{\rho_g}{k_2 \rho_l}\left[\frac{1}{\rho_g}\left(\frac{\partial \rho_g}{\partial p}\right)_s - \frac{1}{\rho_l}\left(\frac{\partial \rho_l}{\partial p}\right)_s\right] = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{1}{\rho_g c_g^2} - \frac{1}{\rho_l c_l^2}\right),$$

откуда находим

$$-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_s = \alpha(1-\alpha)\left(\frac{1}{\rho_g c_g^2} - \frac{1}{\rho_l c_l^2}\right). \qquad (19)$$

Подставляем в формулу (18):

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\alpha}{c_g^2} + \frac{1-\alpha}{c_l^2} + (\rho_l - \rho_g)\alpha(1-\alpha)\left(\frac{1}{\rho_g c_g^2} - \frac{1}{\rho_l c_l^2}\right). \qquad (20)$$

Перегруппируя слагаемые, получим

$$\frac{1}{c^2} = \alpha\left[\frac{1}{c_g^2} + \frac{\rho_l(1-\alpha) - \rho_g(1-\alpha)}{\rho_g c_g^2}\right] + \frac{1-\alpha}{c_l^2} - \alpha\frac{\rho_l(1-\alpha) - \rho_g(1-\alpha)}{\rho_l c_l^2};$$

$$\frac{1}{c^2} = \alpha\left[\frac{\alpha\rho_g + \rho_l(1-\alpha)}{\rho_g c_g^2} + \frac{\rho_g(1-\alpha)}{\rho_l c_l^2}\right] = \frac{\alpha\rho}{\gamma_g p}\left[\frac{\gamma_g p}{\rho_g c_g^2} + \frac{(1-\alpha)p}{\rho_l c_l^2} \cdot \frac{\rho_g}{\rho}\right];$$

отсюда

$$c^2 = \frac{\gamma_g p}{\alpha\rho} \cdot \frac{1}{\dfrac{\gamma_g p}{\rho_g c_g^2} + \dfrac{(1-\alpha)p}{\rho_l c_l^2} \cdot \dfrac{\rho_g}{\rho}}. \qquad (21)$$

Подставляя выражения (12,13) для скорости звука в газе и жидкости, получаем

$$c^2 = \frac{\gamma_g p}{\alpha\rho} \cdot \frac{1}{1 + (1-\alpha)\dfrac{p}{E_l} \cdot \dfrac{\rho_g}{\rho}}. \qquad (22)$$

Второе слагаемое в знаменателе мало по сравнению с первым, так что получаем

$$c^2 = \frac{\gamma_g p}{\alpha\rho}. \qquad (23)$$

Эта формула отличается от формулы (16) только тем, что в нее входит показатель адиабаты газа, а не смеси[3], поэтому естественно полагать, что при большом массовом содержании газа, когда показатель адиабаты двухфазной системы будет практически равен показателю адиабаты газа, формула (16) перейдет в формулу (23). С учетом того что плотность газа мала, получаем

$$c^2 = \gamma_g \frac{p}{\alpha(1-\alpha)\rho_l}. \qquad (24)$$

[3] Разность

$$c_p - c_V = \frac{T}{\rho^2} \frac{\left[(\partial\rho/\partial T)_p\right]^2}{(\partial\rho/\partial p)_T}$$

у жидкостей мала, поэтому показатель адиабаты жидкости близок к единице; показатель адиабаты воздуха равен приблизительно 1.4.